

Das Olbers'sche Paradoxon

Erweitertes Script zum Vortrag

Rainer Göhring

1 Einleitung

Dieses Papier ist als eine Ergänzung zu dem Vortrag „*Warum ist es nachts dunkel? Das Olbers'sche Paradoxon*“ zu verstehen, gehalten an der Volkssternwarte in Hofheim am 16. März 2006. Zur Vorbereitung des Vortrages fiel mir auf, daß in zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema die relevanten Berechnungen nicht explizit erläutert werden, sondern in der Regel entweder nur angedeutet oder es werden nur die Ergebnisse aufgeführt. Das war auch der Fall bei den hauptsächlich benutzten Unterlagen z.B. [6] und [12]. In einem Vortrag kann aus Zeitgründen natürlich nicht auf die einzelnen Rechenschritte eingegangen werden, die zu den zitierten Ergebnissen führen, trotzdem ist es interessant, die Wege zu den Lösungen zu verfolgen. Eine weitere Motivation, die Ableitungen einmal ausführlicher darzulegen, ist ein Zitat aus dem Buch von Harrison (siehe [6] S. 506): „*We might also add that of the many writers who have discussed the paradox very few performed any calculation to support their views*“. Wir führen aber nicht alle je durchgeführten Berechnungen noch einmal aus, sondern beschränken uns auf die sich aus der Waldanalogie von Harrison [6] zur Berechnung der Helligkeit des Olbers'schen Firmamentes – Kap. 2 und Kap. 3 – und der sich aus der mittleren Dichte an leuchtender (baryonischer) Materie des Universums – Kap. 4 – sich ergebenden Schlußfolgerungen. In Kap. 5 schließlich wird gezeigt, daß auch das expandierende Universum nicht der Grund für die Dunkelheit des Nachthimmels sein kann.

2 Die Sichtbarkeitsgrenze

Bereits im Jahre 1672 hatte der Magdeburger Bürgermeister Otto von Guericke (1602–1686) die Waldanalogie im Zusammenhang mit der Sichtbarkeit der Sterne beschrieben

„Wengleich viele Sterne nicht sichtbar sind, so kann man daraus nicht schließen, daß sie nicht existierten. Ein Wald endet auch nicht dort, wo einzelne Bäume nicht mehr weiter gesehen werden können“

(zitiert (in englisch) in [6]). Harrison hat diesen Gedankengang aufgegriffen, um das Rätsel der nächtlichen Dunkelheit zu lösen [5] und führt ihn quantitativ aus, d.h. er gibt Formeln an, die aussagen, wie weit man in einem Wald einzelne Bäume unterscheiden kann, ehe sie eine geschlossene Wand darstellen. Dieser Gedankengang ist auch der Schlüssel zur Lösung des Olbers'schen Paradoxons, wie wir weiter unten sehen werden.

In einem Wald stehe pro Fläche A ein Baum; wenn \bar{a} der mittlere Abstand zwischen den Bäumen ist, dann ist $A = \bar{a}^2$. Die Dicke der Stämme (Durchmesser) sei im Mittel d . Dann ist die Sichtbarkeitsgrenze (lookout limit) s , das heißt die Entfernung von Beobachter bis dahin, wo der Wald als geschlossene Wand erscheint, gegeben durch

$$s = \frac{A}{d} = \frac{\bar{a}^2}{d} \quad (2.1a)$$

und für den 3-dimensionalen Fall, mit a als mittleren Abstand der Sterne (n =Anzahl Sterne pro Volumeneinheit), r_* als Sternradius und $f_* = \pi r_*^2$ als Fläche der Sternscheibe, ergibt sich die Sichtbarkeitsgrenze S zu

$$S = \frac{a^3}{\pi r_*^2} = \frac{1}{n \cdot f_*} \quad (2.1b)$$

Nehmen wir als Beispiel für den 2-dimensionalen Fall den mittleren Abstand der Bäume zu 5 m , d.h. pro 25 m^2 steht im Mittel ein Baum, und den mittleren Durchmesser zu $0,25\text{ m}$ an, so beträgt die Sichtbarkeitsgrenze $s = 100\text{ m}$. Für Anzahl der Bäume resp. der Sterne, die von einem beliebigen Punkt aus sichtbar sind, ergeben sich die Beziehungen

$$n_s = \frac{\pi s^2}{a^2} = \frac{\pi a^2}{d^2} \quad (2.2a)$$

und für den 3-dimensionalen Fall

$$N_s = \frac{4\pi S^3}{3 a^3} = \frac{4\pi a^6}{3 f_*^3} \quad (2.2b)$$

Diese Beziehungen, insbesondere der 3-dimensionale Fall, leiten sich in Analogie zu der *mittleren freien Weglänge* λ ab, die in der kinetischen Gastheorie eine Rolle spielt. Dort ist (siehe z.B. [8]) im Falle, daß gleichartige Moleküle sich in einem Gas gegenseitig stoßen, λ definiert als

$$\lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma}$$

mit σ als Wirkungsquerschnitt und n die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit. Die Beziehung ist eine Wahrscheinlichkeitsaussage, d.h. λ ist der Erwartungswert des Weges, den ein Teilchen in einem Gas zurücklegen kann, ohne auf ein anderes Teilchen zu treffen. Auf das Beispiel des „Sternhimmels“ übertragen, können wir sagen, daß, in welche Richtung wir auch schauen, der Sehstrahl in der Entfernung S aus Gleichung (2.1 b) auf einen Stern trifft, d.h. daß ab dieser Entfernung das gesamte Himmelsgewölbe mit Sternen lückenlos bedeckt ist. Damit gilt aber auch, daß das Licht der Sterne, die jenseits der Sichtbarkeitsgrenze S stehen, von den näher stehenden abgeschattet wird.

Dies läßt sich auch leicht quantitativ nachweisen. Dazu betrachten wir in dem Raum ein Volumenelement dV entspr. Abb. 1. Die Anzahl Sterne pro Volumeneinheit sei wie oben n und der mittlere Abstand der Sterne sei a und damit $n = 1/a^3$. Die Anzahl Sterne $d\nu$ in dem Volumenelement dV ist dann gegeben durch

$$d\nu = \frac{dV}{a^3} = \frac{r^2}{a^3} \sin \delta \, d\delta \, d\phi \, dr \quad (2.3a)$$

Die Anzahl der Sterne dN in der gesamten Kugelschale mit dem Radius r und der Dicke dr ist dann

$$dN = \frac{r^2 dr}{a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \delta \, d\delta \, d\phi = \frac{4\pi r^2 dr}{a^3} \quad (2.3b)$$

Vom Beobachter im Zentrum der Kugel aus gesehen, bedeckt ein Stern den Raumwinkel $d\Omega_*$ auf der Kugelschale vom Radius r

$$d\Omega_* = \pi \cdot \left(\frac{r_*}{r} \right)^2 \quad (2.4a)$$

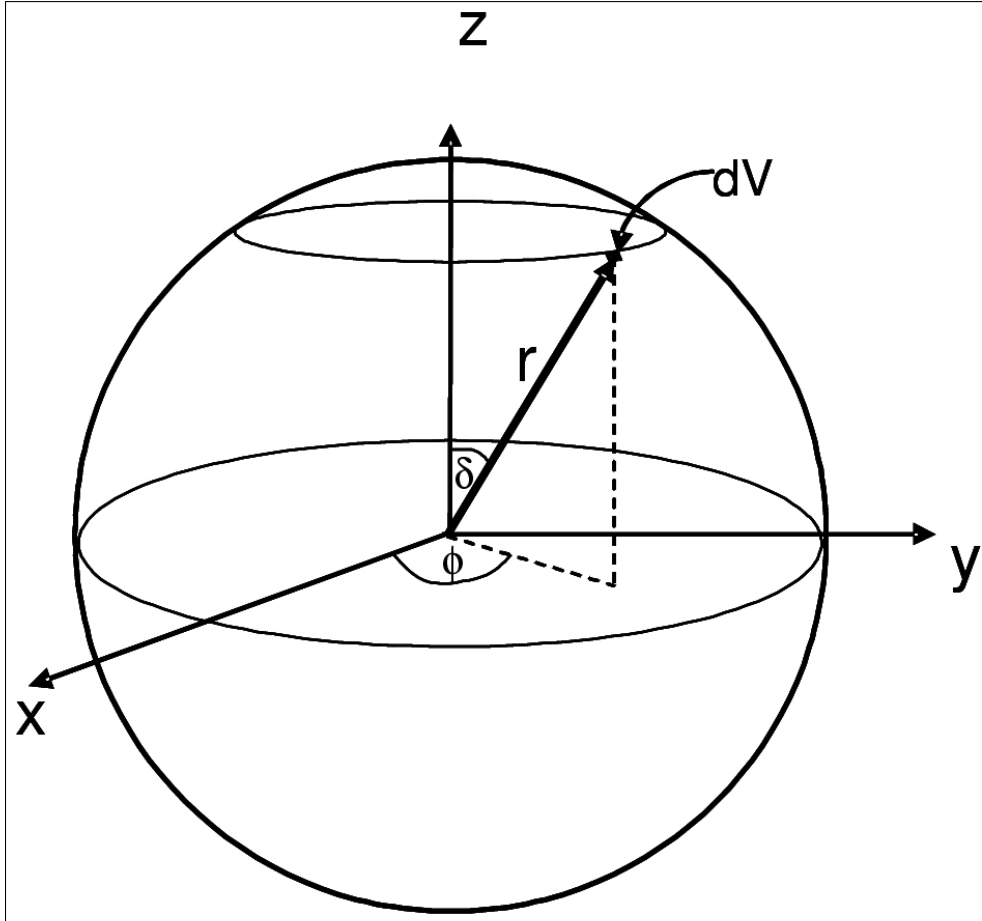


Abbildung 1: Geometrie; Erläuterungen dazu im Text

und als Anteil α der gesamten Kugelschale ergibt sich daraus

$$\alpha = \frac{d\Omega_*}{4\pi} = \frac{r_*^2}{4r^2} \quad (2.4b)$$

Von der Anzahl dN der Sterne in der Kugelschale wird also der Anteil $dN \cdot \alpha$ bedeckt. Berücksichtigen wir nun alle (sichtbaren) Sterne bis zur Sichtbarkeitsgrenze S , so erhalten wir

$$N \cdot \alpha = \pi \frac{r_*^2}{a^3} \int_0^S dr = \pi \frac{r_*^2}{a^3} \cdot S$$

und mit (2.1 b) ergibt sich schließlich

$$N \cdot \alpha = \pi \frac{r_*^2}{a^3} \frac{a^3}{f_*} = 1$$

was nichts anderes ausdrückt als die vollkommenen Bedeckung des „Himmelsgewölbes“ durch Sterne. Das gleiche Ergebnis wird in [1] auch auf anderem Wege abgeleitet.

3 Das Olbers'sche Paradoxon

Mit diesen geometrischen Vorbetrachtungen wenden wir uns jetzt dem Olbers'schen Paradoxon zu, wenn er auch noch keineswegs eine Sichtbarkeitsgrenze in Betracht zog. Mit den Voraussetzungen die er machte

- Das Weltall ist unendlich in Raum und Zeit (eine Vorstellung, die er von I. Kant übernahm).
- Das Weltall ist homogen und isotrop.
- Die mittlere Sternendichte und ihre Leuchtkraft ist zeitlich und räumlich konstant und die einzelnen Sterne leuchten ewig.
- Implizite Annahmen dabei entsprechend dem damaligen – 1824 – Kenntnisstand der Astronomie:
 - Raum zwischen den Sternen ist leer.
 - Der Raum ist euklidisch.
 - Das Weltall ist statisch und es gibt keine systematischen Bewegungen der Sterne.
 - Die physikalischen Gesetze gelten universell und sind nicht zeitabhängig.

und mit der Annahme, alle Sterne seien „Sonnen“, schloß er,

„... da müßte der ganze Himmel eben so hell sein wie die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann, wird nothwendig auf irgend einen Fixstern treffen, und also müßte uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht zusenden“.

Ein ganz offensichtlicher Widerspruch zu der Beobachtung, den Olbers durch die Annahme einer interstellaren Absorption zu beheben versuchte. Abgesehen davon, daß dieses Argument schon bereits 1848 von John Herschel aus physikalischen Gründen widerlegt wurde, ist auch die logische Schlußfolgerung falsch, aus der Menge der Grundannahme eines zu ändern und zu glauben, das Problem sei damit gelöst. Logisch kann man nur den Schluß ziehen, daß nicht alle Annahmen widerlegt sind aber mindestens eine Annahme falsch ist, aber ohne Kenntnis welche und wie viele. Themen dieser Art bezeichnet man als Duhem-Quine-Probleme (siehe dazu auch [?] und [9]).

Eine Lösung des Paradoxes werden wir weiter unten bringen, gehen wir zunächst auf die Frage der Helligkeit des Sternhimmels unter den Olbers'schen Annahmen ein, denn hier herrschen verwirrende Angaben in der Literatur. Sie reichen von einer Temperaturangabe von 6.000 Grad – abgeleitet von der Annahme sonnenähnlicher Sterne – z.B. bei [12] und [6] bis zu einer unendlichen Helligkeit bei [12]. Vor diesem Hintergrund könnte man an die gehässige Aussage von S. L. Jaki [7] erinnert werden „... almost all commentators on Olbers' Paradox did not bother to read the original works but merely repeated one another“ (zitiert in [6]).

Olbers hatte das Problem zur damaligen Zeit nur qualitativ behandelt; im folgenden werden wir es quantitativ angehen und zwar unter Beibehaltung der Annahmen, die auch Olbers gemacht hat (siehe oben), aber unter Einbeziehung der in Kap. 2 beschriebenen Sichtbarkeitsgrenze. Wir greifen dazu auf die Anzahl $d\nu$ der Sterne pro Volumenelement dV entsprechend der Beziehung (2.3 a) aus Kap. 2 zurück. Von allen diesen Sternen soll der gleiche Strahlungsstrom Φ_\star [$W m^{-2}$] ausgehen. Der Strahlungsstrom $d\Phi_{Erde}$, der von der Gesamtheit der Sterne des Volumenelementes dV in der Entfernung r auf der Erde ankommt, ist dann (siehe dazu z.B. [13] oder [4])

$$d\Phi_{Erde} = \left(\frac{r_\star}{r}\right)^2 \cdot \Phi_\star d\nu = \left(\frac{r_\star}{r}\right)^2 \cdot \Phi_\star \frac{dV}{a^3} = \frac{r_\star^2}{a^3} \Phi_\star \sin \delta d\delta d\phi dr \quad (3.1)$$

Der Strahlungsstrom auf der Erde Φ_{Erde} , den alle Sterne bis zur Sichtbarkeitsgrenze S erzeugen¹, ist dann gegeben durch

$$\Phi_{Erde} = \frac{r_*^2}{a^3} \Phi_* \int_0^S \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \delta \, d\delta \, d\phi \, dr = \frac{r_*^2}{a^3} \Phi_* 4\pi S$$

Setzen wir den Wert von S aus Gleichung (2.1 b) in obige Beziehung ein, so erhalten wir

$$\Phi_{Erde} = 4 \cdot \Phi_* \quad [W \, m^{-2}] \quad (3.2)$$

Φ_* ist der Strahlungsstrom, den ein Stern pro Quadratmeter seiner Oberfläche abstrahlt. Das bedeutet, daß in unserem Beispiel von allen Sternen zusammen auf der Erde pro Quadratmeter die vierfache Energie ankommt, die ein (sonnenähnlicher) Beispielstern pro Quadratmeter abstrahlt, wahrlich eine erschreckende Vorstellung. Interessant an dem Ergebnis ist, daß keinerlei geometrische Größe wie z.B. Entfernung bis zur Sichtbarkeitsgrenze, Sternradius oder ähnliches erscheint, sondern einzig und alleine die Energie, die der Stern pro Quadratmeter seiner Oberfläche abstrahlt. Es sei ausdrücklich betont, daß die oben abgeleiteten Beziehungen nur gültig sind, wenn (was ja Olbers voraussetzt) die Sterne unendlich lange leuchten und sich ein Gleichgewicht eingestellt hat.

Olbers schlug nun als Lösung des Paradoxons vor, die interstellare Absorption zu berücksichtigen und schreibt in seinem Artikel „*Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums*“ siehe [10]:

Gewiß ist also der Weltraum nicht ganz absolut durchsichtig. Aber es bedarf nur einer äußerst geringen Grades von Undurchsichtigkeit, um jene, der Erfahrung so ganz widersprechende Folgerung aus einer unendlichen Menge von Fixsternen, daß dann der ganze Himmel uns Sonnenlicht zurücksenden müsse, völlig zu vernichten.

Auf diese Stelle geht wahrscheinlich die immer wieder selbst von Harrison zitierte Temperatur von $6.000^\circ K$ zurück. Wir sollten aber hier nicht von einer Temperatur, sondern von der Energie sprechen, die pro Quadratmeter auf die Erde niederbrennt (eine Atmosphäre brauchen wir in diesem Fall nicht zu berücksichtigen). Nehmen wir auch hier sonnengleiche Sterne an, dann erhalten wir mit dem Strahlungsstrom der Sonne (z.B. aus [13]) $\Phi_* = 6,33 \cdot 10^7 \, W \, m^{-2}$ für die Energie pro Quadratmeter auf der Erde

$$\Phi_{Erde} = 2,53 \cdot 10^8 \, W \, m^{-2}$$

Im Vergleich mit der Solarkonstanten (ebenfalls aus [13]) $1,37 \cdot 10^3 \, W \, m^{-2}$ ist also die einstrahlende Energie ungefähr $2 \cdot 10^5$ mal so groß.

An diesem erschreckenden Sachverhalt des gleißenden Firmamentes aber ändert auch eine interstellare Absorption leider nichts, wie schon Herschel aufgrund des Energiesatzes erkannt hatte, und trotzdem ist es – Gott sei Dank – nachts dunkel. Das Olbers'sche Paradoxon muß also auf anderen Wegen gelöst werden; dieser Aufgabe ist das nächste Kapitel gewidmet.

Zugegeben, die obige Berechnung des Strahlungsstroms ist recht „hemdsärmelig“, insbesondere, da wir in keiner Weise die Abdeckung der Sterne in einer Schicht durch darunter liegende Sterne berücksichtigt haben. Das wollen wir jetzt nachholen. Dazu bezeichnen wir mit $\varphi(r)$ den Anteil freier (nicht von Sternen bedeckter) Fläche im Verhältnis zur gesamten Fläche der Kugelschale mit dem Radius r . Die relative Abnahme der freien Fläche durch die Anzahl der Sterne in der Kugelschale ist dann gegeben durch:

$$\frac{d\varphi(r)}{\varphi(r)} = - \frac{\text{durch Sterne abgedeckte Fläche}}{\text{Fläche der Kugelschale}} = - \frac{f_* \, dN}{4\pi r^2}$$

¹Wir dürfen nur bis zur Sichtbarkeitsgrenze integrieren, denn damit sind alle Sterne erfaßt, die einen Beitrag zu dem Strahlungsstrom auf der Erde leisten. Im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, daß bei der Integration bis zur Sichtbarkeitsgrenze das „Himmelsgewölbe“ komplett mit Sternen abgedeckt ist.

mit Hilfe der Beziehungen (2.1 b) und (2.3 b) erhalten wir daraus

$$\frac{d\varphi(r)}{\varphi(r)} = -\frac{dr}{S}$$

Diese Differentialgleichung integriert von 0 bis r ergibt dann den *freien Anteil der Fläche* der Kugelschale vom Radius r :

$$\varphi(r) = e^{-\frac{r}{S}} \quad (3.3)$$

Analog zu dem oben nach (3.1) berechneten Strahlungsstrom, der von der Kugelschale mit dem Radius r auf der Erde ankommt, berechnen wir ihn nun unter Berücksichtigung der Abschattung durch Vordergrundsterne und Integration über die Winkel δ und ϕ :

$$d\Phi_{Erde}(r) = 4\pi \frac{r^2}{a^3} \Phi_{\star} \cdot e^{-\frac{r}{S}} dr$$

Diese Beziehung integriert von 0 bis r ergibt den gesamten Strahlungsstrom der Sterne in der Kugel vom Radius r

$$\Phi_{Erde}(r) = 4\pi \frac{r^2}{a^3} \Phi_{\star} \int_0^r e^{-\frac{r}{S}} dr = 4 \cdot \Phi_{\star} (1 - e^{-\frac{r}{S}}) \quad (3.4)$$

Den Strahlungsstrom, hervorgerufen durch alle Sterne des Universums, erhalten wir dann, indem wir $r \rightarrow \infty$ gehen lassen

$$\Phi_{Erde} = 4 \cdot \Phi_{\star}$$

das identische Ergebnis wie oben. Dieses auf den ersten Blick verwunderliche Ergebnis klärt sich aber sofort auf, wenn man sich an die Definition der Sichtbarkeitsgrenze S als *mittlere freie Weglänge* erinnert wie in Kap. 2 schon erläutert.

4 Die Lösung des Rätsels

Harrison geht das Problem in [6] auf einem anderen Wege an, indem er fragt, ob im Universum überhaupt genügend Energie vorhanden ist, um solch ein alles verbrennendes Himmelsgewölbe zu erhalten. Er geht davon aus, daß die mittlere Dichte der strahlenden Materie im Universum 1 Wasserstoffatom pro Kubikmeter beträgt. Nimmt man den Extremfall an, daß die Materie nach dem Einstein'schen Gesetz $E = m \cdot c^2$ vollkommen in Energie umgewandelt wird, so kann man die Energiedichte pro Kubikmeter berechnen (ohne viele Nachkommastellen):

$$u = 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-10} \quad [J]$$

Mit dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz errechnet sich dann die Temperatur T des Raumes mit der Energiedichte u

$$T = \sqrt[4]{\frac{u}{\sigma}}$$

daraus ergibt sich dann mit der Boltzmannkonstanten $\sigma = 7,56 \cdot 10^{-16} \left[\frac{J}{m^3 K^4} \right]$ ein Wert für die Temperatur T zu

$$T \approx 20^\circ K$$

Berücksichtigt man, daß die Sterne etwa nur ein Tausendstel ihrer Masse in Energie umwandeln, dann erhalten wir eine Temperatur des Raumes von nur noch $T \approx 3,8^\circ K$.

Es muß hier deutlich betont werden, daß diese Angaben unabhängig davon sind, ob das Universum endlich oder unendlich ist! Letztlich ist also überhaupt nicht genügend Energie im Weltall vorhanden, um den leuchtenden Himmel zu erzeugen.

Aus der oben genannten mittleren Dichte der (strahlenden) Materie kann man auch eine Aussagen über die Sichtbarkeitsgrenze in einem Olbers'schen Universum ableiten. Nehmen wir an, die Materie in diesem Universum würde gleichmäßig zu lauter (gleichen) Sterne mit je der Masse der Sonne kollabieren. Dann können wir bestimmen, wie viel an Raum V benötigt wird, bei dieser Dichte eine Sonne „zusammen zu fegen“:

$$V = \frac{M_{\odot}}{m_H} \approx 1,2 \cdot 10^{57} [m^3] \approx 1,2 \cdot 10^9 Lj^3 \quad (4.1a)$$

daraus ergibt sich der mittlere Abstand zwischen den Sternen zu

$$a = \sqrt[3]{V} \approx 10^3 Lj \quad (4.1b)$$

und aus Gleichung (2.1 b) schließlich mit den Werten für die Sonne

$$S = \frac{a^3}{f_{\odot}} \approx 0,6 \cdot 10^{23} Lj \quad (4.1c)$$

Mit (2.2 b) berechnet sich die Anzahl N_s der Sterne zu

$$N_s = \frac{4\pi}{3} \frac{S^3}{a^3} \approx 10^{60} \quad (4.1d)$$

Der berechnete mittlere Abstand von $\approx 10^3 Lj$ ist durchaus realistisch und entspricht den Beobachtungen, wenn man die Abstände der einzelnen Sterne über große Bereiche des Universums mittelt (nicht sehr verwunderlich, denn so schätzt man die mittlere Materiedichte im Universum ab).

Diese Ergebnisse bieten nun einen Lösungsansatz für das Olbers'sche Paradoxon. Nimmt man sie ernst, dann müßten die Sterne in der Nähe der Sichtbarkeitsgrenze vor mindestens 10^{23} Jahren schon geleuchtet haben, um einen Beitrag zu dem Olbers'schen strahlenden Firmament zu liefern, denn die Lichtgeschwindigkeit ist ja schließlich endlich. Heute wissen wir, daß die Lebensdauer der Sterne endlich ist und etwa 10^{10} Jahre beträgt, d.h. uns kann nur das Licht von Sternen erreichen, die maximal 10^{10} Lichtjahre von uns entfernt sind. Von den 10^{60} Sternen nach (4.1 d), die erforderlich wären, um den Himmel hell zu erleuchten, sehen wir nur den Teil, der innerhalb eines Radius liegt, der den $10^{10}/10^{23} = 10^{-13}$ -ten Teil der Sichtbarkeitsgrenze S ausmacht, ein verschwindend geringer Anteil. Die Anzahl der Sterne N_L , die wir in diesem Falle überhaupt sehen können, errechnet sich nach (2.2) zu

$$N_L = \frac{4\pi}{a^3} \int_0^{10^{-13} \cdot S} r^2 dr = \frac{4\pi}{3a^3} (10^{-13} \cdot S)^3 \approx 10^{21}$$

Wir bekommen also „nur“ 10^{21} Sterne zu sehen anstatt 10^{60} , das bedeutet aber, daß nur ein verschwindender Teil der Himmelskugel von Sternen bedeckt ist und es deshalb nachts dunkel sein kann. Der Strahlungsstrom, der in diesem Fall pro Quadratmeter auf der Erde ankommt, bezeichnen wir mit $\Phi_{Erde}^{(L)}$. Das Verhältnis zwischen $\Phi_{Erde}^{(L)}$ und dem Strahlungsstrom $\Phi_{\star}^{(S)}$, den wir nach (3.2) berechnet haben, läßt sich leicht bestimmen zu

$$\frac{\Phi_{Erde}^{(L)}}{\Phi_{\star}^{(S)}} = 10^{-13}$$

Für die Lösung des Paradoxons kommt es also auf das Verhältnis der Lebensdauer der Sterne zu der Sichtbarkeitsgrenze an, genauer gesagt, um die Lebensdauer der Sterne im Verhältnis zur Lichtlaufzeit von der Sichtbarkeitsgrenze zu uns. Dieses Verhältnis ist so klein, daß auch exaktere Daten zur Lebensdauer oder mittleren Abstand der Sterne nichts ändern. Genau dieses Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir die strenge Rechnung unter Berücksichtigung der Abschattung durchführen. Übernehmen wir die Formel (3.4), so erhalten wir für den Strahlungsstrom Φ_{Erde} , der von den (sichtbaren) Sternen innerhalb der Kugel vom Radius $10^{-13} \cdot S$ hervorgerufen wird:

$$\Phi_{Erde} = 4 \cdot \Phi_{\star} \cdot (1 - e^{-\frac{10^{-13} \cdot S}{s}})$$

wenn wir darin die e-Funktion in Reihe entwickel ergibt sich

$$\Phi_{Erde} = 4 \cdot \Phi_{\star} \cdot (1 - 1 + 10^{-13} - 0,5 \cdot 10^{-26} \dots) \approx 4 \cdot \Phi_{\star} \cdot 10^{-13}$$

mithin praktisch das gleiche Ergebnis wie oben.

Mitte des vorigen Jahrhundert griff H. Bondi das Thema in seinem Buch *Cosmology* [3] wieder auf, nachdem es lange Zeit vergessen war oder einfach nicht zur Kenntnis genommen wurde (zur langen Geschichte des Paradoxons siehe [6]). Von ihm stammt auch die Bezeichnung „*Olbers'sches Paradoxon*“ und er war es auch, der Olbers den Vater der wissenschaftlichen Kosmologie nannte. Durch seine Beschäftigung mit der Kosmologie, die eine Expansion des Raumes fordert, war er sicher, daß man nur die Olbers'sche Prämisse – *das Weltall ist statisch und es gibt keine systematischen Bewegungen der Sterne* – aufheben müsse, um das Paradoxon zu lösen. Lange Zeit glaubte man sogar, man müsse nur nachts auf den dunklen Sternenhintergrund schauen, um einen Beweis für die Expansion des Universums zu haben. Es hat sich aber gezeigt, daß diese Schlußfolgerung falsch ist, wie wir im Folgenden zeigen wollen.

5 Macht das expandierende Universum den Nachthimmel dunkel?

Um diese Frage zu entscheiden, muß untersucht werden, in wie weit die von den Sternen abgestrahlte Energie durch die Expansion des Universums „verdünnt“ wird. Es zeigt sich, daß die auf der Erde beobachtbare Leuchtkraft durch den Faktor $\frac{a(t_0)}{a(t)} = (1+z)$ reduziert wird (siehe dazu z.B. [11]), wobei $a(t)$ der Skalenfaktor zum Zeitpunkt t der Emission der Strahlung und t_0 die heutige Zeit bedeutet – üblicher Weise setzt man dann $a(t_0) = 1$. Um diese durch die Expansion reduzierte Leuchtkraft zu bestimmen, muß man auf ein kosmologisches Modell zurückgreifen, das den zeitlichen Verlauf der Expansion beschreibt.

Wir benutzen dazu das aktuelle Λ -CDM-Modell (Λ Cold Dark Matter-LCDM), mit Hilfe dessen die kosmologischen Parameter Ω_M , Ω_Λ und w anhand der Meßdaten von Supernovae 1a bestimmt werden. Erste Ergebnisse [2] zeigen Werte für $\Omega_M = 0,26$, $\Omega_\Lambda = 0,76$ und $w = -1$ (zu den Fehlertoleranzen siehe den zitierten Artikel). Das kosmologische Modell – die Abhängigkeit der Hubble-Funktion $H(z)$ von z – ist in diesem Fall dann gegeben durch

$$H(z)^2 = H_0^2 [\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda]$$

und als Hinweis auf ein flaches Universum

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$$

Dabei ist H_0 die Hubble-Konstante zum gegenwärtigen Zeitpunkt mit $72 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ als Wert. Mit diesem kosmologischen Modell errechnet sich dann die Zeit [2], die das Licht eines Sternes mit der Rotverschiebung z benötigt, um zu uns zu gelangen:

$$t(z) = \int_0^z \frac{dx}{(1+x)H(x)} \quad (5.1a)$$

Damit läßt sich auch das Alter des Universums (entsprechend diesem Modell) berechnen zu

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)H(x)} \approx 1,31 \cdot 10^{10} \text{ Jahre} \quad (5.1b)$$

Um auf das Thema der Dunkelheit des Nachthimmels zurückzukommen, können wir fragen, um wie viel das Licht der am weitesten entfernten Sterne durch die Expansion des Universums abgeschwächt wird. In Kap. 4 haben wir gesehen, daß aufgrund der begrenzten Lebensdauer der Sterne die gesuchte Entfernung ca. 10^{10} Lichtjahre beträgt. Nun können wir versuchen zu bestimmen, welcher Rotverschiebung z diese Entfernung entspricht. Dazu benutzen wir die Beziehung (5.1 a) und bestimmen zu der Zeit $t(z) = 10^{10}$ das entsprechende z nach der Formel

$$10^{10} = \int_0^z \frac{dx}{(1+x)H(x)} \implies z \approx 2$$

Das heißt, daß bei einem expandierenden Universum die bei uns ankommenden Energie von den Sternen solcher Entfernung gerade mal um ein Drittel gegenüber der „normalen“ entfernungsbedingten Abschwächung reduziert ist; für näher liegende Sterne ist sie noch unbedeutender. Die Expansion des Universums spielt also überhaupt keine Rolle zur Erklärung des Olbers'schen Paradoxons.

6 Zusammenfassung

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Dunkelheit des Nachthimmels – Lösung des Olbers'schen Paradoxons – **nicht bedingt ist** durch

- Absorption des Sternenlichtes,
- hierarchische Anordnung der Sterne,
- Endlichkeit des Universums,
- Expansion des Universums oder
- andere vorgeschlagene Gründe...

Zu seiner Lösung genügen einzig und alleine zwei Grundannahmen:

1. das Licht hat eine endliche Geschwindigkeit und
2. das Universum hat entweder ein endliches Alter oder die Sterne haben eine endliche Lebensdauer.

Der Nachthimmel ist demnach genau dann dunkel, wenn

die mittlere Entfernung der Sterne so groß ist, daß die Lichtlaufzeit zur Sichtbarkeitsgrenze größer ist als das Alter des Universums oder die Lebensdauer der Sterne (welche von beiden auch immer kleiner ist) oder

mit der Betrachtung der im Universum enthaltenen Energie

es gibt zu wenig Energie im Universum, um den Nachthimmel aufzuhellen!

Literatur

- [1] ARPINO, M. und F. SCARDIGLI: *Inferences from the dark sky: Olbers paradox revisited*. arXiv:astro-ph/0007428 v2., 2002.
- [2] ASTIER, P. und J. GUY ET.AL.: *The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M , Ω_Λ and w from the First Year Data Set*. arXiv:astro-ph/0510447 v1., 2005.
- [3] BONDI, H.: *Cosmology*. Cambridge University Press, 1960.
- [4] GÖHRING, R.: *Elektromagnetische Strahlung, Informationsquelle für den Astronomen; unveröffentlicht*. 2003.
- [5] HARRISON, E.: *Darkness at Night: A Riddle of the Universe*. Harvard University Press, 1987.
- [6] HARRISON, E.: *Cosmology*. Cambridge University Press, 2. Aufl., 2003.
- [7] JAKI, S.: *The Paradox of Olbers' Paradox*. Herder New York, 1969.
- [8] MESCHEDÉ (HRSG.), D.: *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, 22. Aufl., 2003.
- [9] MITTELSTRASS (HRSG.), J.: *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1980.
- [10] OLBERS, H.: *Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraumes*. Astron. Jahrb. für das Jahr 1826, S. 110–121, 1823.
- [11] PERIVOLAROPULOS, L.: *Accelerating Universe: Observational Status and Theoretical Implications*. arXiv:astro-ph/0601014 v2., 2006.
- [12] RICHTER, P. H.: *Das Olberssche Paradoxon*.
<http://donar.physik.uni-bremen.de/nlp/publications/olbers/>.
- [13] UNSÖLD, A. und B. BASCHEK: *Der neue Kosmos*. Springer Verlag, 7. Aufl., 2005.